# 3×3有限射影線型群のコホモロジーについての注意 (有限群のコホモロジー論の研究)



手塚, 康誠

数理解析研究所講究録 1251 巻 2002 年 124-129



# 3×3 有限射影線型群のコホモロジーについての注

手塚 康誠 (Michishige Tezuka)
琉球大学理学部 (Faculty of Science

## 序

これは前回の集会で話させてもらった、スペクトル列
報告です。使う記号から初めたいと思います。$\mathbb{F}_q$ を
有限体、$\mathbb{C}$を複素数として射影線型群 $PGL_3(q)$,
$PGL_3(q)=GL_3(q)/\mathbb{F}_q^{\times}$ , $PGL_3(\mathbb{C})=GL_3(\mathbb{C})/\mathbb{C}^{\times}$

と定義します。ここで $\mathbb{F}_q^{\times}$, $\mathbb{C}^{\times}$ は $\mathbb{F}_q$ 及び$\mathbb{C}$の乗法群として

$$\mathbb{F}_q^{\times}=\left\{\left.\begin{pmatrix}\alpha & & \\ & \alpha & \\ & & \alpha\end{pmatrix}\right|\ \alpha\in\mathbb{F}_q^{\times}\right\}$$

等です。このとき有限群のコホモロジー $H^{\cdot}(PGL_3(q),$
を考えます。係数体を $\mathbb{Z}/3$ に限る理由として、対応する
$PGL_3(\mathbb{C})$について, $\ell\neq 3$ とすると

$$H^{\cdot}(PGL_3(\mathbb{C}),\mathbb{Z}/\ell)\cong H^{\cdot}(GL_3(\mathbb{C}),\mathbb{Z}/\ell).$$

更に $PGL_3(\mathbb{C})$ の積から定義される余積 $\Delta$:$H^{\cdot}(PGL_3(\mathbb{C}),\mathbb{Z}$
$\mathbb{Z}/3)\otimes H^{\cdot}(PGL_3(\mathbb{C}),\mathbb{Z}/3)$ が非可換になることによります。G
単純シュバレイ群とするとき, $H^{\cdot}(G(\mathbb{C}),\mathbb{Z}/\ell)$ のホップ代
ボレル, 荒木, 戸田, 三村, 河野の諸先生の研究によって
それによると上述の $H^{\cdot}(PGL_3(\mathbb{C}),\mathbb{Z}/3)$が ランクの一番小さい
が可換とはならない例になっています。以下 $PGL_3$ を$G$と
ジーの係数はことわりがない場合は $\mathbb{Z}/3$ とします。

## 1 方法と結果

前回話させていただいたとき，構成したスペクトル列

(1) $E_2 = \mathrm{cot}_{H^*(G(\mathbb{C}))}(H^*(G(\mathbb{C})), \mathbb{Z}/3) \Rightarrow H^*(G(q))$

を使って，$E_2$項を計算します。次に$E_\infty$項を見たいわけですが，これは$E_2$項からだけからではわかりませんでした。仕方がないので，$H^*(G(q))$を別のやり方で行なってみました。$q \equiv 4, 7 \bmod 9$の条件より$G(q)$の3-Sylow群は位数27のextra special 3-群$E$になっているので，$H^*(E)$は計算されているので，それから$H^*(G(q))$を計算してみました。その結果$E_2 = E_\infty$となっていることがわかりました。この説明からわかりますように，この方法は全く不完全です。しかし上のスペクトル列の$E_2$項はかなり計算が可能です。例外群$E_6$，$q \equiv 1 \bmod 2^n$（$n$は十分大）で係数は$\mathbb{Z}/2$や，最近西本氏により$F_4$，$q \equiv 1 \bmod 3^n$（$n$は十分大），係数は$\mathbb{Z}/3$で$E_2$-項は計算されました。そこでこれらの群のelementary abelian groupsは庄司，水野先生などによってわかっているので，それらの正規化群を調べることで，$E_\infty$-項がある程度わかるのではないかと思っています。しかしこちらにはこれらの事は手に余ることなので，群論の方に色々教えていただければと思っています。一応結果をまとめると

**定理1** $G(q) = PGL_3(q)$, $q \equiv 4, 7 \bmod 9$とする。このとき次が成立します。

(2) $E_2 = E_\infty$

(3) $$PS\,H^*(G(q), \mathbb{Z}/3) = \frac{f(t)}{(1-t^8)(1-t^{12})}$$

$$f(t) = 1 + t + 2t^2 + 3t^3 + 3t^4 + 3t^5 + 3t^6 + 4t^7 + 4t^8 + 4t^9 + 4t^{10} + 4t^{11} + 3t^{12} + 3t^{13} + 3t^{14} + 3t^{15} + 2t^{16} + t^{17} + t^{18}$$

ここで $PS\,H^*(G(q), \mathbb{Z}/3) = \sum_{n=0}^{\infty} (\dim_{\mathbb{Z}/3} H^n(G(q)))\, t^n$.

## 3　$E_2$ 項の計算

まず Cotor の定義を復習してみます。A を体 $k$ 上の Hopf 代数, $\Delta: A \to A\otimes A$ を coproduct, M は A上の comodule ($\Delta_M: M \to M\otimes A$) とします。$C^n(M, A) = M\otimes A^{\otimes n}$, $d^n: C^n(M, A) \to C^{n+1}(M, A)$ を

$$d^n = \sum_{i=0}^{n+1} (-1)^i d_i^n,$$

$$d_0^n(m\otimes a_1\otimes \cdots \otimes a_n) = \Delta_M(m)\otimes a_1\otimes \cdots \otimes a_n$$

$$d_i^n(m\otimes a_1\otimes \cdots \otimes a_n) = m\otimes a_1\otimes \cdots \otimes a_{i-1}\otimes \Delta(a_i)\otimes a_{i+1}\otimes \cdots \otimes a_n\ ,\quad 1\leq i\leq n$$

$$d_{n+1}^n(m\otimes a_1\otimes \cdots \otimes a_n) = m\otimes a_1\otimes \cdots \otimes a_n\otimes 1$$

として, $\mathrm{Cot}_A^n(M, k) = H^n(C^{\cdot}(M, A), d)$ として定義します。

次に $\mathrm{Cot}_{H^{\cdot}(G(\mathbb{C}))}(H^{\cdot}(G(\mathbb{C}), \mathbb{Z}/3)$ を作用をはっきりされるため $\mathrm{Cot}_{H^{\cdot}(G(\mathbb{C}))}(H^{\cdot}(G(\mathbb{C}))_{ad},$ $\mathbb{Z}/3)$ と書くことにします。coproduct $\Delta: H^{\cdot}(G(\mathbb{C})) \to H^{\cdot}(G(\mathbb{C}))\otimes H^{\cdot}(G(\mathbb{C}))$ は積 $G(\mathbb{C})\times G(\mathbb{C}) \to G(\mathbb{C})$ から誘導されたもの。$q\equiv 4,7 \bmod 9$ のとき, Frobenius F は $H^{\cdot}(G_{\bar{k}})$ に自明に作用 ($\bar{k}$ は $k$ の代数閉包, コホモロジーはエタール) することがわかるので, $H^{\cdot}(G(\mathbb{C})_{ad}, \mathbb{Z}/3)$ は $G(\mathbb{C})_{ad}\times G \to G(\mathbb{C})_{ad}$ は $(x, g) \to g^{-1}xg$ から誘導されます。最初に必要なデーターは

定理1 (Baum-Browder [B-B])
$G = G(\mathbb{C}) = PGL_3(\mathbb{C})$ とするとき

(1) $H^{\cdot}(G) = \mathbb{Z}/3[x_2]\otimes \Lambda(x_1, x_3)$

(2) $\Delta: H^{\cdot}(G) \to H^{\cdot}(G)\otimes H^{\cdot}(G)$ は

$$\Delta(x_3) = x_3\otimes 1 + 1\otimes x_3 + x_1\otimes x_2$$

$$\Delta(x_i) = x_i\otimes 1 + 1\otimes x_i \qquad i=1,2.$$

補題2. comodule $\Delta_{od}\ H^{*}(G(\mathbb{C})_{od}) \to H^{*}(G(\mathbb{C})_{od}) \otimes H^{*}(G(\mathbb{C}))$ は

$$\Delta_{od}(x_3) = x_3 \otimes 1 + x_1 \otimes x_2 - x_2 \otimes x_1$$

$$\Delta_{od_F}(x_i) = x_i \otimes 1, \quad i = 1, 2.$$

これで Cot を計算するのに必要は情報はそろいましたが，まだ実際に計算するには，定義からでは大変です。しかし Kono-Mimura-Shimada [KMS] により $C^{*}(H^{*}(G(\mathbb{C})_{od}), H^{*}(G(\mathbb{C}))$ を適当な関係式で割ったものが与えられています。それを使って計算したものを示します。

命題3 $E_2 \simeq (C \oplus D) \otimes \mathbb{Z}/3[y_{12}]$

ここで

$$C = \mathbb{Z}/3[y_8]\{\mathbb{Z}/3[x_2]/x_2^3 \otimes \Lambda(x_1)\{\tau_6, y_7\tau_6\} \oplus \mathbb{Z}/3[x_2]/x_2^2 \otimes \Lambda(x_1)\{\tau_{12}\} \oplus \{\gamma_7\} \oplus \{\gamma_{11}\}\}$$

$$\oplus\ \mathbb{Z}/3[y_2] \otimes \Lambda(x_1)\{\gamma_7\}$$

$$D = \mathbb{Z}/3[y_8]\{\mathbb{Z}/3[x_2]/x_2^3 \otimes \Lambda(x_1)\{1, y_7\} \oplus (\mathbb{Z}/3[x_2]/x_2^3 \otimes \Lambda(x_1) - \{x_2^2 x_1\})\{y_3\} \oplus \{y_3 y_7\}\}$$

$$\oplus\ \mathbb{Z}/3[y_2]\{y_2, x_1 y_2\}$$

この表示を使うことで初めの定理に書いた $E_2$-項の Poincaré polynomial を計算できます。

4　$G(q)$ と $H^{*}(G(q))$

$G(q)$, $q \equiv 4, 7 \bmod 3$ の 3-local structure は split する完全列

(1) $1 \to \mathbb{Z}/3 \oplus \mathbb{Z}/3 \to G \to SL_2(\mathbb{Z}/3) \to 1$

で与えられ行列で書くと

$$G = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & * & * \\ 0 & \multicolumn{2}{c}{SL_2(\mathbb{Z}/3)} \\ 0 & & \end{pmatrix} \middle|\ * \in \mathbb{Z}/3 \right\} \subset SL_3(\mathbb{Z}/3).$$

$G$ と $G(q)$ の 3-sylow 群は同型で

$$P=\left\{\begin{pmatrix}1&*&*\\&1&*\\&&1\end{pmatrix}\;\middle|\;*\in\mathbb{Z}/3\right\}$$

で与えられます。(1) の完全列で $\mathbb{Z}/3\oplus\mathbb{Z}/3=\langle a,c\rangle$, $b=\begin{pmatrix}1&1\\0&1\end{pmatrix}\in SL_2(\mathbb{Z}/3)$ とすると $P=\langle a,b,c\mid a^3=b^3=c^3=1,\ [a,b]=c\rangle$ となります。

補題4 elementary 3-abelian group $A$ について $W(A)=N_G(A)/A$, $N_G(A)=\{g\in G\mid g^{-1}Ag=A\}$ とするとき, $W(\langle c,a\rangle)=SL_2(\mathbb{Z}/3)$, $W(\langle c,b\rangle)\simeq W(\langle c,ab\rangle)\simeq S_3$ (3次対称群).

$H^{\cdot}(P)$ は Leary や Milgram-T で与えられていて, その計算結果から

命題5. Ristriction maps の族

$$H^{\cdot}(G)\longrightarrow H^{\cdot}(\langle c,a\rangle)^{SL_2(\mathbb{Z}/3)}\oplus H^{\cdot}(\langle c,b\rangle)^{S_3}\oplus H^{\cdot}(\langle c,ab\rangle)^{S_3}$$

は単射である。

この結果から $H^{\cdot}(G)$ が具体的に書けます。結果を書くと,

定理6

$$H^{\cdot}(P)=\mathbb{Z}/3[c]\otimes\left\{\begin{array}{l}\mathbb{Z}/3[b_1]\{1,b_3,b_3^2,e_1,e_1b_3,e_1b_3^2,\alpha_1,\alpha_1b_3^2,\tilde{\alpha}_1,\tilde{\alpha}_1b_3,\tilde{\alpha}_1b_3^2\}\\ \oplus\,\mathbb{Z}/3[b_3]\{b_3^3,e_3,\alpha_3,\tilde{\alpha}_3\}\oplus\{e_1\alpha_3\}\oplus\{b_1\alpha_3-b_3\alpha_1\}\\ \oplus\,\{\alpha_1\tilde{\alpha}_3\}\end{array}\right.$$

次元は, $|c|=6$, $|b_1|=|b_3|=|\alpha_1|=|\alpha_3|=2$, $|\tilde{\alpha}_1|=|\tilde{\alpha}_3|=3$, $|e_1|=|e_3|=1$.

このとき命題3の生成元は

$y_{12}=b_1^6+b_3^6+c^2$, $y_8=b_1c$, $x_1=e_3$, $y_2=b_3+\alpha_1$, $x_2=\alpha_1$,

$y_3=\beta(y_2)$, $y_7=P^1\beta(y_2)$, $\tau_6=b_3b_1^3$, $\gamma_8=\alpha_3c$, $\gamma_9=\beta(\alpha_3c)=\tilde{\alpha}_3c$

$\gamma_{11}=\alpha_1\tilde{\alpha}_3c$, $\tau_{12}=b_3^2b_1^4$ に取れます。尚これから $\tau_6=x_2^3$, $\tau_{12}=\tau_6^2=x_2^6$ となり $\tau_6$, $\tau_{12}$ は ring generator としては必要がありません。ここで $\beta$ は Bockstein operation, $P^1$ は Steenrod operation です。

他の文献については前回を見てください。

References

[MKS] Mimura. M Kono. A and N. Shimada Cohomology of classifying spaces of certain associative H-spaces , J. Math. Kyoto univ 15-3(1975) 607-617

[BB] P. F. Baum-W. Brouder The cohomology of quotients of classical groups, Topology, 3(1965), 3o5-336